Modul 1

Logika Matematika

Pendahuluan

Pada Modul ini akan dibahas materi yang berkaitan dengan logika proposisi dan logika predikat, serta berbagai macam manipulasi didalamnya.

Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa memahami dan mampu membangun kalimat, mengevaluasi kalimat dan menentukan validitas suatu kalimat.

Tujuan Instruksional Khusus

Mahasiswa diharapkan dapat:

1. Memahami pengertian proposisi dan predikat
2. Memahami pengertian kwantor
3. Memahami penggunaan penghubung dan tabel kebenaran
4. Memahami pengertian interpretasi
5. Memahami dan mampu menentukan dua kalimat ekivalen
6. Memahami dan mampu mengevaluasi kalimat

1.1 Kegiatan Belajar I

Logika Proposisi dan Logika Predikat

1.1.1 Uraian dan Contoh

Logika proposisi(kalkulus proposisi) menelaah manipulasi antar proposisi. Logika predikat(kalkulus predikat) menelaah manipulasi antar predikat. Oleh karena itu sebelum melangkah lebih jauh, kita perlu memahami terlebih dahulu pengertian proposisi dan pengertian predikat.

□ **Definisi 1.1.1: (Proposisi)**
Sebuah proposisi(*proposition*) atau *statement* ialah sebuah kalimat deklaratif yang memiliki tepat satu nilai kebenaran, yaitu: **"Benar"(B)** atau **"Salah"(S)**

CONTOH 1.1.1 : Beberapa contoh proposisi dan bukan proposisi:

1. Jakarta adalah ibu kota Republik Indonesia.
2. 7 merupakan sebuah bilangan prima.
3. Manusia adalah salah satu jenis makluk di Bumi.
4. Taufik Hidayat pandai main bulu tangkis atau tennes.
5. Jika 10 habis dibagi dengan 4, maka juga habis dibagi dengan 2.
6. Mudah-mudahan anda berhasil dalam meniti karier.
7. Berolahragalah secara teratur!

◊

Kalimat deklaratif pertama, kedua dan ketiga dalam contoh 1.1.1 tidak memuat penghubung disebut **proposisi primitip**(*primitif*), dan dilambangkan dengan huruf kecil: p, q, r, s. Kalimat deklaratif keempat dan kelima memuat penghubung "atau" dan "jika...maka..." disebut **proposisi majemuk**(*composite*). Kalimat keenam dan ketujuh bukan proposisi.

☐ **Penghubung atau konektif(*connective*)**
Dalam logika matematika dikenal sebanyak 5 penghubung, yaitu:

1. Negasi(*Negation*)
2. Konjungsi(*Conjunction*)
3. Disjungsi(*Disjunction*)
4. Implikasi(*Implication*)
5. Ekuivalensi(*Equivalence*)

☐ **Definisi 1.1.2: (Penghubung)**
Misalkan p dan q adalah proposisi.

1. **Negasi:**
   Untuk sembarang proposisi, p, yang memiliki nilai kebenaran, B/S, maka negasinya ditulis sebagai, $\overline{p}$, memiliki nilai kebenaran lawannya, S/B.

2. **Konjungsi:**
   Konjungsi p dan q dinyatakan dengan, $p \bigwedge q$, adalah sebuah proposisi yang bernilai benar jika proposisi p dan q keduanya bernilai benar.

3. **Disjungsi:**
   Disjungsi p dan q dinyatakan dengan, $p \bigvee q$, adalah proposisi yang bernilai salah jika proposisi p dan q keduanya bernilai salah.

4. **Implikasi (proposisi bersyarat):**
   Implikasi dari p ke q dinyatakan dengan, $p \rightarrow q$, ialah proposisi yang bernilai salah jika dan hanya jika p bernilai benar dan q bernilai salah.
   Proposisi p disebut **anteseden(premis/hipotesa)** dan proposisi q disebut **konsekuen(konklusi/kesimpula**

5. **Ekuivalensi/Biimplikasi:**
   Ekivalensi dari p dan q dinyatakan dengan, $p \leftrightarrow q$, adalah proposisi yang bernilai benar jika proposisi p dan q mempunyai nilai kebenaran sama.

CONTOH 1.1.2 : (Beberapa contoh proposisi majemuk)
Misalkan p, q dan r adalah proposisi, dimana:
p : Bumi adalah satu-satunya planet di jagat raya yang mempunyai kehidupan. (B)
q : Satu dekade sama dengan 10 tahun. (B)
r : $1 + 1 = 3$. (S)

Maka:

1. $\overline{p}$: Bumi bukan satu-satunya planet di jagat raya yang mempunyai kehidupan. (S)
2. $q \bigwedge r$: Satu dekade sama dengan 10 tahun dan $1 + 1 = 3$. (S)
3. $q \bigvee r$: Satu dekade sama dengan 10 tahun atau $1 + 1 = 3$. (B)
4. $q \rightarrow r$: Jika satu dekade sama dengan 10 tahun maka $1 + 1 = 3$. (S)
5. $q \leftrightarrow r$: Satu dekade sama dengan 10 tahun jika dan hanya jika $1 + 1 = 3$. (S)

$\Diamond$

CONTOH 1.1.3

$\Diamond$

Nyatakan proposisi berikut dengan simbol dan tentukan apakah benar atau salah.
"Blaise Pascal menemukan sejumlah mesin hitung dan tidak benar bahwa komputer digital elektronik pertama dirakit pada abad ke dua puluh atau π dihitung hingga 1.000.000 angka desimal pada tahun 1954".

Jawaban:
Pertama, setiap proposisi primitip kita beri simbol, misalkan:
p : Blaise Pascal menemukan sejumlah mesin hitung.
q : Komputer digital elektronik pertama dirakit pada abad ke dua puluh.
r : π dihitung hingga 1.000.000 angka desimal pada tahun 1954.
Maka proposisi yang ditanyakan bisa ditulis secara simbolik sebagai
$(p \bigwedge \overline{q}) \bigvee r$

Untuk selanjutnya, karena pada tahun 1642 Blaise Pascal menemukan mesin hitung (*calculator*), komputer digital pertama kali dirakit sekitar tahun 1944 dan hingga tahun 1973 tidak pernah π dihitung sampai 1.000.000 angka desimal, maka proposisi p dan q bernilai benar dan proposisi r bernilai salah. Jika disubstitusikan ke dalam bentuk simbolik diatas, maka diperoleh
$(p \bigwedge \overline{q}) \bigvee r \leftrightarrow (B \bigwedge \overline{B}) \bigvee S$
$\leftrightarrow (B \bigwedge S) \bigvee S$
$\leftrightarrow S \bigvee S$
$\leftrightarrow S$

Jadi proposisi tersebut diatas bernilai salah.

□ **<u>Tabel kebenaran</u> (*Truth table*)**

Untuk mengevaluasi apakah sebuah proposisi majemuk benar atau salah kita perlu tabel kebenaran dari konektif yang ada dalam proposisi tersebut. Untuk sembarang proposisi p dan q, rangkuman tabel kebenaran dari semua konektif dapat dilihat pada Tabel 1.1.1.

Tabel 1.1.1: Tabel kebenaran konektif

p	q	$\overline{p}$	$p \bigwedge q$	$p \bigvee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
—	—	—	—	—	—	—
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B	S
S	S	B	S	S	B	B

Logika proposisi tidak bisa menggambarkan sebagian besar proposisi dalam matematika dan ilmu komputer. Sebagai ilustrasi, perhatikan pernyataan berikut:

p : n adalah bilangan ganjil.

Pernyataan p bukan sebuah proposisi karena nilai kebenaran p bergantung pada nilai kebenaran n. Sebagai contoh, p benar jika n=103 dan salah jika n=8. Karena kebanyakan pernyataan dalam matematika dan ilmu komputer menggunakan peubah(variabel), maka kita harus mengembangkan sistem logika yang mencakup pernyataan tersebut.

□ **<u>Definisi 1.1.3:</u> (Fungsi proposisi/Predikat)**

Misalkan $P(x)$ merupakan sebuah pernyataan yang mengandung variabel x dan D adalah sebuah himpunan. Kita sebut P sebuah **fungsi proposisi (dalam D)** jika untuk setiap x di D, P(x) adalah proposisi. Kita sebut D **daerah asal pembicaraan** (*domain of discourse*) dari P.

CONTOH 1.1.4 : Berikut ini beberapa contoh fungsi proposisi:

1. $n^2 + 2n$ adalah bilangan ganjil, dengan daerah asal himpunan bilangan bulat.
2. $x^2 - x - 6 = 0$, dengan daerah asal himpunan bilangan real.
3. Seorang pemain bisbol memukul bola melampaui 300 pada tahun 1974, dengan daerah asal himpunan pemain bisbol.

$\Diamond$

Sebuah predikat seringkali menyatakan sebuah hubungan relasional antara: konstanta, variabel dan fungsi.

Simbol-simbol yang digunakan dalam logika predikat:

1. Simbol **konstanta** : a, b, c, d.
2. Simbol **variabel** : x, y, z, w.
3. Simbol **fungsi** : f, g, h.
4. Simbol **predikat** : P, Q, R, S.

CONTOH 1.1.5 : Beberapa contoh predikat:

1. $2x+3 \geq 5$, dengan x bilangan bulat positip dapat ditulis sebagai untuk setiap x (bulat positip), $P(x) : f(x) \geq 5$
2. $x + y \leq x - y$, dengan x dan y bilangan real dapat ditulis sebagai untuk setiap x,y (real), $Q(x, y) : f(x, y) \leq g(x, y)$
3. jika $x > 0$ maka $4x + 1 \geq 1$, dengan x bilangan bulat dapat ditulis sebagai beberapa x (bulat), jika $R(x) : x > 0$, maka $S(x) : h(x) \geq 1$

$\Diamond$

Predikat $P(x)$ menyatakan hubungan relasional antara fungsi $f(x)$ dan konstanta 5. Predikat $Q(x, y)$ menyatakan hubungan relasional antara fungsi $f(x, y)$ dengan fungsi $g(x, y)$. Contoh ketiga memuat penghubung bersyarat ”jika ... maka ... ” dengan premis predikat $R(x)$ dan konklusi predikat $S(x)$.

□ **Definisi 1.1.4: (Kuantor)**
Misalkan P(x) adalah fungsi proposisi dengan daerah asal D.

1. Pernyataan **”untuk setiap x, P(x)”** dikatakan sebagai pernyataan kuantor universal dan secara simbolik ditulis sbb:
   $\forall x, P(x)$
   Simbol ”$\forall$” disebut **kuantor universal**.
2. Pernyataan **”untuk beberapa x, P(x)”** dikatakan sebagai pernyataan kuantor eksistensial dan secara simbolik ditulis sbb:
   $\exists x, P(x)$
   Simbol ”$\exists$” disebut **kuantor eksistensial**.

Pernyataan untuk setiap x, P(x) bernilai benar jika untuk setiap $x \in D$, maka P(x) bernilai benar. Pernyataan beberapa x, P(x) bernilai benar jika terdapat sekurang-kurangnya satu $x \in D$ sehingga P(x) bernilai benar. Jadi untuk mengevaluasi sebuah proposisi dalam bentuk simbolik dan memuat predikat, kita harus menetapkan daerah asal dari setiap variabelnya dan memberikan interpretasi terhadap fungsi dan predikat yang ada didalamnya.

CONTOH 1.1.6

$\Diamond$

Tulislah proposisi berikut secara simbolik:

"Untuk setiap bilangan bulat positip yang habis dibagi dengan 6 juga habis dibagi dengan 3"

Jawaban:

Misalkan: Predikat "x habis dibagi dengan y" secara simbolik ditulis sebagai P(x,y). Maka predikat "x habis dibagi 6 juga habis dibagi 3" secara simbolik dapat ditulis sbb:

Jika P(x,6) maka P(x,3)

Jadi proposisi yang ditanyakan secara simbolik dapat ditulis sbb:

$\forall x$**, Jika P(x,6), maka P(x,3)**

dengan daerah asal himpunan bilangan bulat positip.

CONTOH 1.1.7

$\Diamond$

Evaluasilah apakah proposisi berikut benar atau salah:

$\forall x \exists y$**, Q(x,y)**

dengan Q(x,y) mempunyai interpretasi 2x=y dan x,y mempunyai daerah asal himpunan bilangan ganjil.

Jawaban:

Proposisi tersebut dapat dikatakan sbb:

Untuk setiap bilangan ganjil x dapat ditemukan bilangan ganjil y sehingga 2x=y.

Karena untuk setiap x bilangan ganjil 2x bilangan genap, maka bilangan y adalah genap (dengan kata lain bilangan ganjil y tak pernah ditemukan).

Jadi proposisi yang ditanyakan bernilai salah.

□ **Definisi 1.1.5: (Ekuivalensi)**

Dua proposisi yang memuat n variabel dikatakan ekivalen, jika untuk setiap pemberian nilai kebenaran terhadap setiap variabel dari kedua proposisi tersebut, maka keduanya mempunyai nilai kebenaran sama.

CONTOH 1.1.8

$\lozenge$

Dengan menggunakan tabel kebenaran penghubung maka dapat diperlihatkan bahwa proposisi " $p \rightarrow q$" ekuivalen dengan proposisi "$\overline{p} \bigvee q$".

Jawaban:

p	q	$p \rightarrow q$	$\overline{p} \bigvee q$
B	B	B	B
B	S	S	S
S	B	B	B
S	S	B	B

Dalam tabel dapat dilihat bahwa $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\overline{p} \bigvee q)$

Catatan:

1. Kontraposisi : $\overline{q} \rightarrow \overline{p} \leftrightarrow p \rightarrow q$
2. Invers : $\overline{p} \rightarrow \overline{q} \leftrightarrow q \rightarrow p$: Konvers

□ **Skema ekuivalensi**

Untuk memudahkan mengevaluasi sebuah proposisi yang dinyatakan dalam bentuk formula, maka diberikan tabel skema ekuivalensi seperti terlihat pada Tabel 1.1.2.

Tabel 1.1.2: Tabel ekuivalensi

E1.	$\overline{\overline{p}} \leftrightarrow p$	*Double Negation*
E2.	$p \bigwedge q \leftrightarrow q \bigwedge p$	*Comutative Law*
E3.	$p \bigvee q \leftrightarrow q \bigvee p$	*idem*
E4.	$(p \bigwedge q) \bigwedge r \leftrightarrow p \bigwedge (q \bigwedge r)$	*Associative Law*
E5.	$(p \bigvee q) \bigvee r \leftrightarrow p \bigvee (q \bigvee r)$	*idem*
E6.	$p \bigwedge (q \bigvee r) \leftrightarrow (p \bigwedge q) \bigvee (p \bigwedge r)$	*Distributive Law*
E7.	$p \bigvee (q \bigwedge r) \leftrightarrow (p \bigvee q) \bigwedge (p \bigvee r)$	*idem*
E8.	$\overline{p \bigwedge q} \leftrightarrow \overline{p} \bigvee \overline{q}$	*De Morgan Law*
E9.	$\overline{p \bigvee q} \leftrightarrow \overline{p} \bigwedge \overline{q}$	*idem*
E10.	$p \bigwedge p \leftrightarrow p$	*Idempotent Law*
E11.	$p \bigvee p \leftrightarrow p$	*idem*
E12.	$r \bigwedge (p \bigvee \overline{p}) \leftrightarrow r$	
E13.	$r \bigvee (p \bigwedge \overline{p}) \leftrightarrow r$	
E14.	$r \bigwedge (p \bigwedge \overline{p}) \leftrightarrow S$	
E15.	$r \bigvee (p \bigvee \overline{p}) \leftrightarrow B$	
E16.	$p \rightarrow q \leftrightarrow \overline{p} \bigvee q$	
E17.	$\overline{p \rightarrow q} \leftrightarrow p \bigwedge \overline{q}$	
E18.	$p \rightarrow q \leftrightarrow \overline{q} \rightarrow \overline{p}$	*Contrapositive Law*
E19.	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \bigwedge q) \rightarrow r$	
E20.	$\overline{p \rightleftharpoons q} \leftrightarrow p \rightleftharpoons \overline{q}$	
E21.	$p \rightleftharpoons q \leftrightarrow (p \rightarrow q) \bigwedge (q \rightarrow p)$	
E22.	$(p \rightleftharpoons q) \leftrightarrow (p \bigwedge q) \bigvee (\overline{p} \bigwedge \overline{q})$	

□ **Sifat negasi/ekuivalensi kuantor:**

1. **Kuantor Universal:** $\overline{\forall x, P(x)} \leftrightarrow \exists x, \overline{P(x)}$
2. **Kuantor Eksistensial:** $\overline{\exists x, P(x)} \leftrightarrow \forall x, \overline{P(x)}$

CONTOH 1.1.9 : ◊

Tentukan negasi dari formula yang memuat kuantor berikut:

1. $\forall x \exists y, (P(x) \bigwedge Q(y))$
2. $\exists x \forall y, (Q(x) \rightarrow R(y))$

Jawaban:

1. $\overline{\forall x \exists y, (P(x) \bigwedge Q(y))} \leftrightarrow \exists x, \overline{(\exists y, (P(x) \bigwedge Q(y)))}$
   $\leftrightarrow \exists x \forall y, \overline{(P(x) \bigwedge Q(y))}$
   $\leftrightarrow \exists x \forall y, (\overline{P(x)} \bigvee \overline{Q(y)})$

2. $\overline{\exists x \forall y, (Q(x) \rightarrow R(y))} \leftrightarrow \forall x, \overline{(\forall y, (Q(x) \rightarrow R(y)))}$
$\leftrightarrow \forall x \exists y, \overline{(Q(x) \rightarrow R(y))}$
$\leftrightarrow \forall x \exists y, (\overline{R(y)} \rightarrow \overline{Q(x)})$

□ **<u>Definisi 1.1.6:</u> (*Tautology, Contradiction and Satisfiable*)**

1. **Tautologi:**
   Sebuah proposisi dikatakan bernilai Tautologi, jika proposisi tersebut bernilai benar terhadap setiap pemberian nilai kebenaran bagi setiap variabelnya.
2. **Kontradiksi:**
   Sebuah proposisi dikatakan bernilai Kontradiksi, jika proposisi tersebut bernilai salah terhadap setiap pemberian nilai kebenaran bagi setiap variabelnya.
3. **Satisfiabel:**
   Sebuah proposisi dikatakan Satisfiabel, jika bernilai benar terhadap suatu pemberian nilai kebenaran bagi setiap variabelnya.

CONTOH 1.1.10 : ◊

1. Proposisi $p \bigvee \overline{p}$ adalah tautologi dan proposisi $p \bigwedge \overline{p}$ adalah kontradiksi.

p	$p \bigvee \overline{p}$	$p \bigwedge \overline{p}$
B	B	S
S	B	S

2. Proposisi $p \rightarrow q$ adalah satisfiabel.

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

□ **<u>Definisi 1.1.7:</u> (Implikasi Tautologi)**

Sebuah proposisi p dikatakan berakibat propisisi q, jika implikasi ”$p \to q$” bernilai tautologi, dan ditulis ”$p \Rightarrow q$”.

CONTOH 1.1.11 : $\Diamond$

Dengan tabel kebenaran perlihatkan bahwa: $(p \to q) \Rightarrow (\overline{p} \bigvee q)$

Jawaban:

p	q	$p \to q$	$\overline{p} \bigvee q$	$(p \to q) \Rightarrow (\overline{p} \bigvee q)$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B

□ **Skema Implikasi Tautologi:**

Untuk memudahkan manipulasi proposisi yang memuat implikasi tautologi, maka diberikan tabel skema implikasi tautologi seperti terlihat pada Tabel 1.1.3.

Tabel 1.1.3: Skema implikasi tautologi

I1.	$p \bigwedge q \Rightarrow p$	*Simplification*
I2.	$p \bigwedge q \Rightarrow q$	*idem*
I3.	$p \Rightarrow p \bigvee q$	*Addition*
I4.	$q \Rightarrow p \bigvee q$	*idem*
I5.	$\overline{p} \Rightarrow p \to q$	
I6.	$q \Rightarrow p \to q$	
I7.	$\overline{p \to q} \Rightarrow p$	
I8.	$\overline{p \to q} \Rightarrow \overline{q}$	
I9.	$p, q \Rightarrow p \bigwedge q$	
I10.	$\overline{p}, p \bigvee q \Rightarrow q$	*Disjunctive syllogism*
I11.	$p, p \to q \Rightarrow q$	*Modus ponens*
I12.	$\overline{q}, p \to q \Rightarrow \overline{p}$	*Modus tollens*
I13.	$p \to q, q \to r \Rightarrow p \to r$	*Hypothetical syllogism*
I14.	$p \bigvee q, p \to r, q \to r \Rightarrow r$	*Dilema*

CONTOH 1.1.12 : $\Diamond$

Tunjukkan bahwa: $(p \bigwedge q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$

Jawaban:

Harus ditunjukkan bahwa proposisi: $(p \bigwedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ bernilai tautologi.

p	q	$p \bigwedge q$	$p \rightarrow q$	$(p \bigwedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	S	B	B
S	S	S	B	B

1.1.2 Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Kerjakan semua soal Latihan 1.1 dan bandingkan jawaban anda dengan kunci jawaban pada bagian belakang Modul ini. Hitunglah jumlah jawaban anda yang benar. Kemudian gunakan rumus dibawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi Kegiatan Belajar I.

Rumus

$$Tingkat\ Penguasaan\ = \frac{jumlah\ jawaban\ anda\ yang\ benar}{banyakya\ soal\ latihan\ 1.1} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang anda capai:

85%	-	100%	: Baik Sekali
75%	-	84%	: Baik
60%	-	74%	: Cukup
50%	-	59%	: Kurang
0%	-	49%	: Jelek

Jika anda mencapai tingkat penguasaan 75% ke atas, ”Bagus”, anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar II. Sebaliknya, jika penguasaan anda dibawah 75% anda harus mengulangi Kegiatan Belajar I, khususnya bagian yang belum anda pahami, atau anda dapat diskusikan dengan dosen/asisten dosen anda.

1.1.3 Daftar pustaka:

1. **GRIMALDI, R.P.,** *"Discrete and Combinatorial Mathematics* - *An Applied Introduction"*, 2nd Edition, Addison Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1989.

2. **JOHNSONBAUGH, R.,** *"Matematika Diskrit"*, Edisi ke 4, Jilid I dan II, PT. Prenhallindo, Jakarta, 1998.

3. **ROSEN, K.H.,** *"Discrete Mathematics and Its Application"*, 5th Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 2003.

4. **TREMBLAY, J.P. AND MANOHAR,R.,** *"Discrete Mathematical Structures with Apllications to Computer Science"*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1988.